18-5-17

Πόρισμα: Αν $\Phi: S \to S^2(\mathbb{R})$ είναι τοπική ισομετρία και S συμπαγής επιφάνεια, τότε η S είναι σφαίρα και η $\Phi = \tau|_S$, όπου $\tau \in Isom(\mathbb{R}^3)$.

Συνέχεια (*)

$\Leftrightarrow \langle \ddot{c}(s), N\circ c(s) \rangle = \langle \dot{c}(s), N\circ c(s) \rangle^{\cdot} - \langle \dot{c}(s), (N\circ c)^{\cdot}(s) \rangle$
$= -\langle \dot{c}(s), dN_{c(s)}(\dot{c}(s)) \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \ddot{c}(s), N\circ c(s) \rangle = \langle \dot{c}(s), L_{c(s)}(\dot{c}(s)) \rangle$

Για $s=0$ (που θέλω): $\langle \ddot{c}(0), N\circ c(0) \rangle = \langle \dot{c}(0), L_{p_0}(\dot{c}(0)) \rangle$
$= \langle w, L_{p_0} w \rangle$

ν: (+) $\Leftrightarrow 1 - \|p_0\|^2 \langle w, L_{p_0} w \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\langle L_{p_0} w, w \rangle \geq 1/\|p_0\|^2 \quad \forall w \in T_{p_0} S}$

$e_1, e_2 \in T_{p_0} S$ είναι οι κύριες διευθύνσεις της S στο p_0.
Άρα, έχω $L_{p_0} e_1 = k_1(p_0) e_1$, $L_{p_0}(e_2) = k_2(p_0) e_2$

$\langle L_{p_0} e_2, e_2 \rangle \geq \frac{1}{\|p_0\|} \Rightarrow k_2(p_0) \geq \frac{1}{\|p_0\|}$

Άρα, $K(p_0) = k_1(p) k_2(p) \geq \frac{1}{\|p_0\|^2}$ ~~[illegible]~~

ή ($k_2 = f(k_1)$, $f\downarrow$).

Θεώρημα: Έστω S συμπαγής επιφάνεια με σταθερή μέση καμπυλότητα. Αν η καμπυλότητα Gauss K είναι παντού θετική, τότε η S είναι σφαίρα.

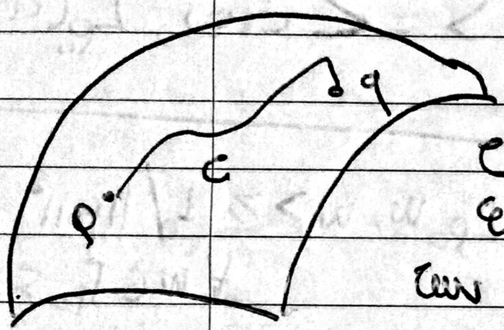
Απόδειξη

$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \Leftrightarrow k_1 + k_2 = 2H \Leftrightarrow k_2 = 2H - k_1$ (*)

$k_1, k_2 : S \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και S συμπαγής : $(\exists p_0 \in S)$:
$k_1(p_0) = \max_S k_1$

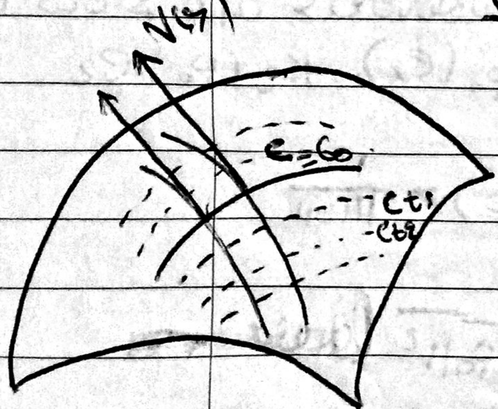
(*) : k_2 στο p_0 έχει ολικό ελάχιστο
Από ΛΗΜΜΑ $\Longrightarrow k_1(p_0) = k_2(p_0)$
Έστω $p \in S$: $k_1(p) \leq k_1(p_0) = k_2(p_0) \leq k_2(p) \xRightarrow{k_1(p) \geq k_2(p)}$
$\Rightarrow k_1(p) = k_2(p) \Rightarrow$ σφαίρα.

Γυρνάμε στο αρχικό πρόβλημα



Να βρεθεί καμπύλη c της S που ενώνει τα σημεία $p, q \in S$ και της οποίας το μήκος είναι το ελάχιστο μεταξύ των μηκών όλων των καμπυλών της S που ενώνουν τα p, q.

Θεωρία Μεταβολών



Έστω $c : I \to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου s

Ορισμός: Καλούμε μεταβολή της $c : I \to S$ μια λεία απεικόνιση $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to S$
$(t, s) \longmapsto h(t, s)$
$c_t : I \to S$, $c_t(s) = h(t, s)$
και $c_0 = c$ $(\Leftrightarrow h(0, s) = c(s))$.

Ορισμός: Καλούμε πεδίο μεταβολής της h το διαν. πεδίο $V(s)$ κατά μήκος της c που ορίζεται ως εξής:
$V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(0,s)$.

Μεταβολές που διατηρούν τα άκρα

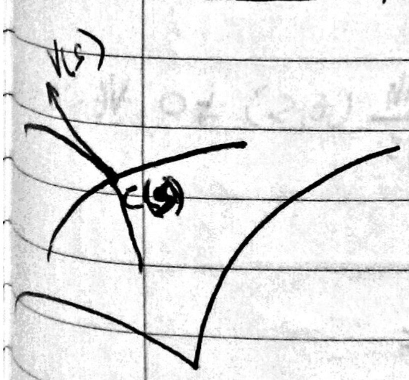
Έστω $c : [0,\ell] \to S$, $c(0)=p$, $c(\ell)=q$.

Λέμε ότι η μεταβολή $h : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,\ell] \to S$ διατηρεί τα άκρα **αν** $h(t,0)=p \wedge h(t,\ell)=q$, $\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

- $V(0) = \frac{\partial h}{\partial t}(0,0) = 0$, $V(\ell) = 0$.

Πρόταση: Έστω $c : I \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και $V(s)$ διανυσματικό πεδίο αυτής, τότε υπάρχει μεταβολή $h : (-\varepsilon,\varepsilon) \times I \to S$ της c με πεδίο μεταβολής το δοθέν $V(s)$.

"Απόδειξη"



$$h(t,s) = \exp_{c(s)}(tV(s)), \text{ διότι } \gamma(t,p,v) = \gamma(1,p,tv) = \exp_p(tv).$$

$$h(0,s) = c(s)$$

Ορισμός: Έστω $c : [0,\ell] \to S$, $c(0)=p$, $c(\ell)=q$ και $h : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,\ell]$ μεταβολή. Καλούμε συνάρτηση μήκους της μεταβολής h την συνάρτηση $L_h : (-\varepsilon,\varepsilon) \to [0,+\infty)$
$L_h(t) = \text{μήκος της } c_t = \int_0^\ell \left\| \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\| ds$

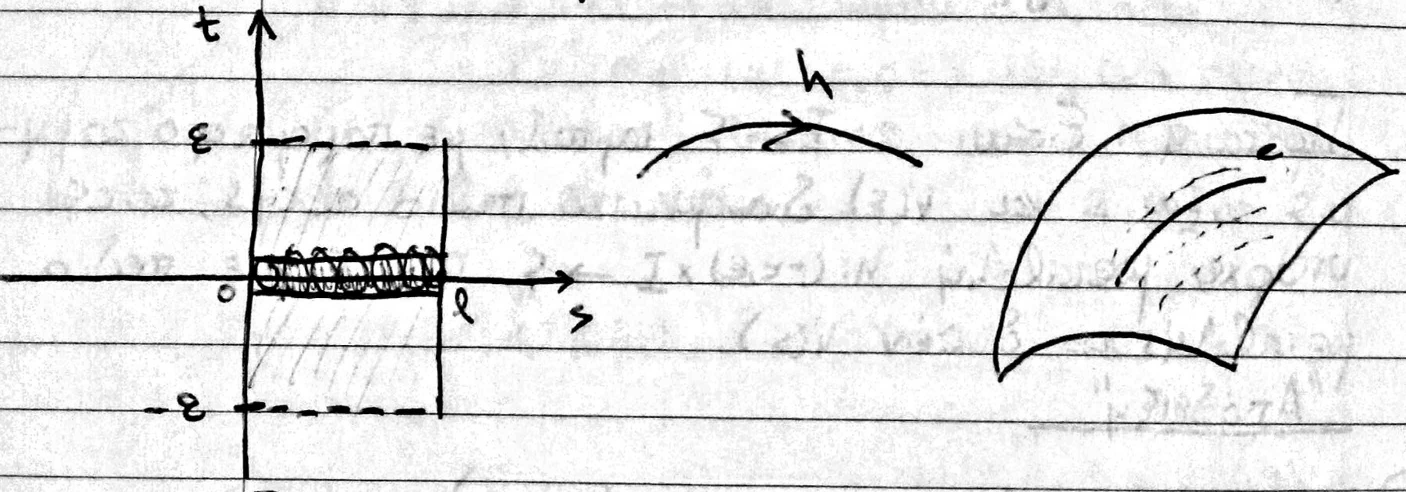
• $L_h(0) =$ μήκος της $c_0 = l$.

<u>Παρατήρηση</u>: Η καμπύλη c είναι λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του μήκους όταν η συνάρτηση $L_h(t)$ έχει ελάχιστο για $t=0$, για κάθε μεταβολή h της c που διατηρεί τα άκρα.

<u>$1^{η}$ μεταβολή του μήκους</u>

Για δοθείσα μεταβολή h της $c: [0,l] \to S$, να υπολογίσω το $L_h'(0)$, $L_h(t) = \int_0^l \left\| \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\| ds$.

• Για $t=0$: $\left\| \frac{\partial h}{\partial s}(0,s) \right\| = \| \dot{c}(s) \| = 1$.



Για $\varepsilon > 0$, αρκούντως μικρό, έχω: $\frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \neq 0, \ \forall (t,s) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,l]$

$$L_h'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^l \left\| \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\| ds =$$

$$= \int_0^l \frac{d}{dt}\left(\left\| \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\| \right) ds = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}(t,s), \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\rangle} \right) ds$$

$$= \int_0^l \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}(t,s), \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\rangle}{2\sqrt{\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}(t,s), \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\rangle}} = \int_0^l \frac{2\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}(t,s), \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(t,s) \right\rangle}{2\left\| \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\|}$$

$$\Rightarrow L_h'(t) = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}(t,s), \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(t,s) \right\rangle}{\left\| \frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right\|} ds$$

$$L_h'(0) = \int_0^l \frac{\left\langle \frac{\partial h}{\partial s}(0,s), \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(0,s) \right\rangle}{\left\| \frac{\partial h}{\partial s}(0,s) \right\|} ds$$

Έχω: $h(0,s) = c(s)$, $V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(0,s)$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{\partial h}{\partial s}(0,s) = \dot{c}(s) \qquad \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}(0,s) = \dot{V}(s)$$

Άρα, δείξαμε:

<u>Πρόταση (1η μεταβολή του μήκους)</u>

Αν $h: (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,l] \to S$ είναι μεταβολή της $c:[0,l]\to S$ με S = μήκος τόξου, τότε $L_h'(0) = \int_0^l \langle \dot{c}(s), \dot{V}(s)\rangle ds$

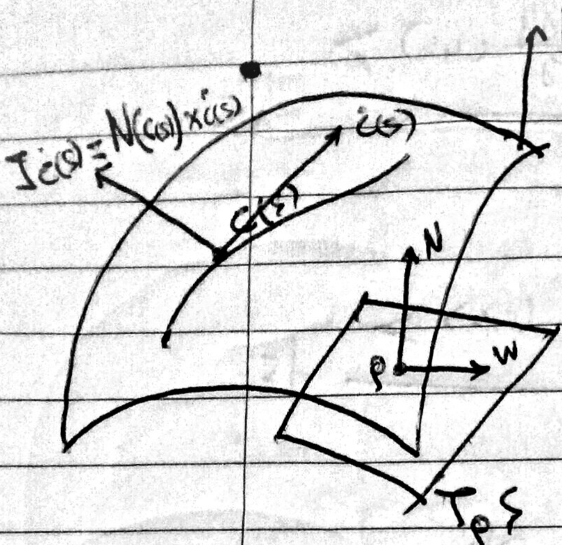
- $$L_h'(0) = \int_0^l \left(\langle \dot{c}(s), V(s)\rangle^{\circ} - \langle \ddot{c}(s), V(s)\rangle \right) ds =$$

$$= \int_0^l \left(\langle \dot{c}(s), V(s)\rangle \right)^{\circ} ds - \int_0^l \langle \ddot{c}(s), V(s)\rangle ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L_h'(0) = \langle \dot{c}(l), V(l)\rangle - \langle \dot{c}(0), V(0)\rangle - \int_0^l \langle \ddot{c}(s), V(s)\rangle ds}$$

- Αν h διατηρεί τα άκρα, τότε $V(0) = V(l) = 0$, οπότε:

$$L_h'(0) = \int_0^l \langle \ddot{c}(s), V(s)\rangle ds.$$



$$K = \langle \ddot c, J\dot c \rangle$$

$J : T_pS \to T_pS$, $J_pW = N \times W =$ στροφή του W στο T_pS κατά γωνία $\pi/2$.

Έτσι, $\{\dot c(s), J\dot c(s)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $T_{c(s)}S$

$$\ddot c = \underbrace{\langle \ddot c, \dot c \rangle}_{\frac{1}{2}(\langle \dot c, \dot c \rangle)' = 0} \dot c + \langle \ddot c, J\dot c \rangle J\dot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot c = \langle \ddot c, J\dot c \rangle J\dot c$$

$$\langle \ddot c, V \rangle = \langle \ddot c, J\dot c \rangle \langle J\dot c, V \rangle = \underbrace{\langle \ddot c, N\circ c \times \dot c \rangle}_{K_g} \langle J\dot c, V \rangle$$

Οπότε: $\boxed{L'_h(0) = -\int_0^l K_g(s) \langle J\dot c(s), V(s) \rangle ds}$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $p, q \in S$ και $c : [0, l] \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s, $c(0) = p$, $c(l) = q$. Αν η c είναι λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του μήκους, τότε η c είναι γεωδαισιακή.

Απόδειξη

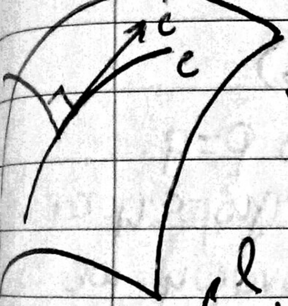
Αφού, η c είναι λύση για κάθε μεταβολή h που διατηρεί τα άκρα (p,q) έχω $L_h'(0)=0 \iff \underbrace{\int_0^l K_g(s)\langle J\dot c(s), V(s)\rangle ds}_{=0}$

Έστω $Y(t,s)$ τυχαία μεταβολή της c και $g:[0,l]\to\mathbb{R}$ με $g(0)=g(l)=0$. Ορίζω $h(t,s)=Y(g(s)t,s)$

$h(0,s)=Y(0,s)=c(s)$

$h(t,0)=Y(0,0)=c(0)=p$

$h(t,l)=Y(g(l)t,l)=Y(0,l)=c(l)=q.$



$$V_Y = f\cdot J\dot c,\ \text{δηλαδή } V_Y\perp \dot c$$

$$V_h(s)=\frac{\partial h}{\partial t}(0,s)=g(s)V_Y$$

$$\int_0^l K_g(s)\langle J\dot c, V(s)\rangle ds=0,\quad V(s)=f(s)K_g J\dot c$$

$$\Rightarrow \int_0^l K_g^2(s) f(s)\, ds=0 \Rightarrow K_g^2 f=0 \xrightarrow[\text{στο }(0,l)]{f>0} K_g=0 \text{ στο } (0,l).$$

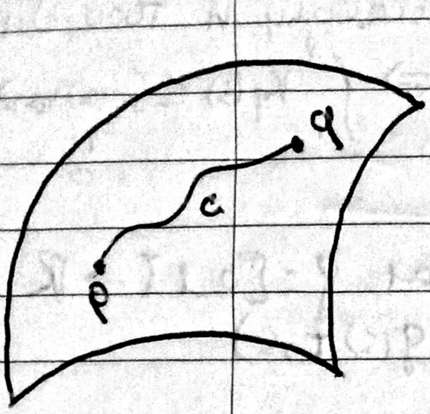
2η μεταβολή

Έστω $c:[0,l]\to S$ είναι γεωδαισιακή και h μεταβολή με $V(0)=V(l)=0$ και $\langle V(s),\dot c(s)\rangle=0$, τότε:

$$L_h''(0)=\int_0^l\left(\left\|\frac{DV}{ds}(s)\right\|^2-K\circ c(s)\|V(s)\|^2\right)ds=$$

$$=-\int_0^l\left\langle \frac{D^2V}{ds^2}+K\circ c(s)V(s), V(s)\right\rangle ds.$$

Εσωτερική απόσταση



$$\inf \{ L(c) \,/\, c \text{ κατά τμήματα διαφορίσιμων καμπυλών που ενώνει τα } p,q \} = d_S(p,q)$$

Πρόταση: Ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $d_S(p,q) = d_S(q,p)$

ii) $d_S(p_1,p_3) \leq d_S(p_1,p_2) + d_S(p_2,p_3)$

iii) $d_S(p,q) \geq 0$ και $d_S(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

iv) Η τοπολογία της d_S είναι η επαγόμενη τοπολογία.

v) Η πληρότητα της d_S είναι ισοδύναμη με το ότι οι γεωδαισιακές έχουν άπειρο μήκος προς κάθε κατεύθυνση, δηλαδή πλήρης επιφάνεια.

Θεώρημα Hopf-Riemann

Αν S είναι πλήρης επιφάνεια, τότε υπάρχουν πάντα δύο τυχαία σημεία με ελάχιστη γεωδαισιακή.

Θεώρημα Bonnet-Myers

Έστω S πλήρης επιφάνεια. Αν $(\exists \delta > 0)$: καμπυλότητα Gauss $K \geq \delta > 0$, τότε η S είναι συμπαγής με διάμετρο $d \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$